EXAMEN DE MECANIQUE - L1 PCP - 17 Mai 2011

I | A) 1) R galiléen $\Rightarrow \sum \vec{F}_{ext}(M/R) = \vec{P} + \vec{R}$ (Poids et Réaction)

2) a - Une force est conservative si son travail est indép. du ch. suivi.

b - Seul le poids est conservatif -

c - si elle est conservative.

d - le Poids

e - $\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{dl} = -mg\,dz = -d\mathcal{E}_{pp} \Rightarrow \mathcal{E}_{pp} = mgz + cte$

$\mathcal{E}_{pp}(z=0) = 0$ et $\sin\alpha = z/l \Rightarrow \mathcal{E}_{pp} = mgl\sin\alpha$.

3) TEM : $\Delta\mathcal{E}_m = W(\vec{F}^{\,non\,cons}) = 0$ (car sans frottement)

$\Rightarrow \mathcal{E}_m(B) = \mathcal{E}_m(A) \Leftrightarrow \mathcal{E}_c(B) + \mathcal{E}_{pp}(B) = \mathcal{E}_c(A) + \mathcal{E}_{pp}(A)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(AB)\sin\alpha = \frac{1}{2}mv_A^2$ et $\tan\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{b}{AB} \Rightarrow v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gb\cos\alpha}$

4) Au pire, on arrive en B avec une vitesse nulle $\Rightarrow v_{A\,lim} = \sqrt{2gb\cos\alpha}$

5) $\sum\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$ $\Rightarrow$ en projection perpendiculairement à (AB), on a $= -P\sin\alpha = ma \Rightarrow a = -g\sin\alpha$.

6) $a = -g\sin\alpha = cte \Rightarrow v = -gt\sin\alpha + v_A \Rightarrow v_B = -gt_{AB}\sin\alpha + v_A$

$\Rightarrow t_{AB} = \frac{v_A - v_B}{g\sin\alpha} = \frac{v_A - \sqrt{v_A^2 - 2gb\cos\alpha}}{g\sin\alpha}$

B) 1) $\sum\vec{F}_{ext}(M/R) = \vec{P} + \vec{R} = -mg\vec{e}_z + R_N\vec{e}_r = m\frac{d^2 b\vec{e}_r}{dt^2} = mb(\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{e}_r)$

Par projection suivant $\vec{e}_r$: $-mg\cos\theta + R_N = -mb\dot{\theta}^2 \Rightarrow R_N = m(g\cos\theta - b\dot{\theta}^2)$

2) Pas de frottement $\Rightarrow \mathcal{E}_m = cte \Rightarrow \mathcal{E}_m(H) = \frac{1}{2}mv_H^2 + mgb = \mathcal{E}_m(B)$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_H^2 + mgb = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgb\cos\alpha \Rightarrow v_H = \sqrt{v_B^2 + 2gb(\cos\alpha - 1)}$

3) $R_N > 0$

4) $R_N(\theta = 0) > 0 \Rightarrow g\cos\theta_H - b\dot{\theta}_H^2 > 0 \Leftrightarrow \dot{\theta}_H^2 < \frac{g}{b}$

$v_H^2 = (b\dot{\theta}_H)^2 \Leftrightarrow \frac{v_B^2 + 2gb(\cos\alpha - 1)}{b^2} < \frac{g}{b}$

$\Leftrightarrow v_A^2 - 2gb\cos\alpha + 2gb(\cos\alpha - 1) < bg \Leftrightarrow v_A < \sqrt{3gb}$

5) $R_N = 0 \Leftrightarrow g\cos\theta_{lim} - b\dot{\theta}_{lim}^2 = 0 \Leftrightarrow (b\dot{\theta}_{lim})^2 = gb\cos\theta_{lim}$

TEM $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgb\cos\theta = \frac{1}{2}mv_H^2 + mgb \Rightarrow v_{lim}^2 = v_H^2 + 2gb - 2gb\cos\theta_{lim}$

$\Rightarrow v_H^2 + 2gb(1 - \cos\theta_{lim}) = gb\cos\theta_{lim} \Rightarrow \theta_{lim} = \cos^{-1}\left(\frac{v_H^2 + 2gb}{3gb}\right)$

$\Rightarrow \theta_{lim} = \cos^{-1}\left(v_A^2/3gb\right)$

EXAMEN DE MECANIQUE - L1 PCP - 17 Mai 2011

II A) 1) $\vec{F}_{grav} = -\frac{G M_T M_{sat}}{r^2}\vec{e}_r$, avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{OG}}{OG}$

2) $\vec{P} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{ie}(S, R_g/R_e)$

↳ Force d'inertie due à la rotation de la Terre.

Or, $R_g \equiv$ réf. galiléen $\Rightarrow \vec{F}_{ie}$ négligée $\Rightarrow \vec{P} \simeq \vec{F}_{grav}$

3) $\vec{P} = M_{sat}\vec{g}(r) \Rightarrow \vec{g}(r) = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{e}_r \Rightarrow g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$

$g_0 = g(r=R) = \frac{GM_T}{R^2} \Rightarrow GM_T = g_0 R^2 \Rightarrow g(r) = \frac{R^2}{r^2} g_0$

4) $\vec{OG} = \underset{(cte)}{r}\,\vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = r\omega\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = r(\dot{\omega}\vec{e}_\theta - \omega^2\vec{e}_r)$

Mvt plan $\Rightarrow$ base cylindropolaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, avec $\vec{e}_\theta = \frac{\vec{v}}{v}$.

5) $\sum\vec{F} = \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega} = 0 \Rightarrow \omega = cte \\ -M_{sat}\frac{R^2}{r^2}g_0 = -M_{sat} r\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{R^2 g_0}{r^3}} \end{cases}$

B) 1) R_c = réf lié au centre de masse du syst. solaire et dt les 3 axes sont dirigés vers des étoiles suffisamment éloignées pr être considérées ≈ fixes (x_0, y_0, z_0)

R_g = réf lié au centre de la Terre + (x_0, y_0, z_0).

Réf galiléen = Réf (fixe ou en transl. rect et unif.) / R_c.

2) R en rotation ⇒ non galiléen.

3) $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$, $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_y\vec{e}_y$ (ss frott ⇒ $\vec{R}$ ⊥ déplacement)

$\vec{F}_{ie} = -m\left[\vec{a}(O\in R_g/R_c) + \frac{d\vec{\Omega}(R_g/R_c)}{dt}\times\vec{OM} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{OM})\right]$

$= -m\omega\vec{e}_x \times\left[\omega\vec{e}_x \times (r+z)\vec{e}_z\right] = m\omega^2(r+z)\vec{e}_z$

$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}(M/R) = -2m\omega\vec{e}_x \times \dot{z}\vec{e}_z = 2m\omega\dot{z}\vec{e}_y$

4) $\sum\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{z}\vec{e}_z \Rightarrow$ En proj $\parallel \vec{e}_z$: $-mg(r+z) + m\omega^2(r+z) = m\ddot{z}$

D'où : $\ddot{z} - \omega^2(r+z) = -g(r+z) \simeq -g(r) = -\frac{R^2}{r^2}g_0$ $(z \ll r)$

$\Rightarrow \ddot{z} - \omega^2 z = \omega^2 r - \frac{R^2}{r^2}g_0 = 0$

5) $z(t) = A\,ch\,\omega t + B\,sh\,\omega t = \frac{a}{2}ch\,\omega t$

6) $z(T) = a = \frac{a}{2}ch\,\omega T \Rightarrow T = \frac{1}{\omega}ch^{-1}2$

7) Proj $\parallel \vec{e}_x \Rightarrow R_x = 0$ et Proj $\parallel \vec{e}_y \Rightarrow R_y = -2m\omega\dot{z} = -ma\omega^2 sh\,\omega t$

8) P.A.R : $\vec{F} = -\vec{R} = +ma\omega^2 sh\,\omega t\,\vec{e}_y$